

## 자유 축척 그물망 위에서의 Axelrod 모델

조민수 · 김홍주 · 육순형\* · 김엽

경희대학교 물리학과 및 기초과학연구소, 서울 130-701

(2008년 12월 9일 받음)

우리는 다리수 분포 (degree distribution)가  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 를 만족하는 자유 축척 그물망 위에서 문화의 형성과 파급에 관한 Axelrod 모형에 대하여 연구하였다. Axelrod 모형에서는 다양성을 나타내는 변수  $q$ 에 대하여 임계값  $q_c$ 가 존재한다. 즉  $q < q_c$ 일 때는 문화계의 구성 원소들의 대부분이 단일문화에 속하는 질서상태가 되고,  $q > q_c$ 일 때는 구성 원소들이 서로 다른 문화를 갖게되는 무질서상태가 된다. 이런 질서-무질서 상전이 현상의 특성이 자유 축척 그물망의 다리수 지수  $\gamma$ 에 의존하여 어떻게 변화하는지를 연구하였다.  $\gamma \leq 3$ 에서는  $q_c$ 가 유한 그물망의 크기  $N$ 에 대하여  $q_c(N) \sim N^\beta$  ( $\beta > 0$ )와 같은 멱법칙을 만족함을 유한 크기 축척 (finite size scaling) 이론을 사용하여 알아내었다. 이는  $N \rightarrow \infty$ 일 때 또는 무한크기의 그물망위에서는 상전이는 존재 하지 않고 문화계는 어떤  $q$ 에서도 항상 질서상태에 있음을 의미한다. 반면  $\gamma > 3$ 에서는  $N \rightarrow \infty$ 일 때 유한한  $q_c$ 에서 상전이가 나타남을 보였다.

PACS numbers: 87.23.Ge, 05.70.Fh, 05.90.+m, 89.90.+n  
Keywords: 복잡계, 여론동역학, 사회계 물리, 상전이현상

### I. 서 론

최근 물리학자들은 사회, 경제계 등에서 관찰되는 복잡계의 거동에 관한 많은 연구를 하고 있다 [1-10]. 하지만 여러 사회, 경제현상에서 나타나는 임계현상 (critical phenomena), 자기구조화 (self-organization), 창발현상 (emergence behavior) 등과 같은 복잡계 거동들의 물리적 분석은 용이하지가 않다. 그럼에도 불구하고 물리학자들은 단순한 모델을 도입함으로써 이런 복잡계 거동들의 기본 원리에 대해 간단하게 설명하려는 시도를 해왔다.

특히 사회계에서 문화의 형성과 파급에 대해 연구한 Axelrod 모형은 여러 사람들에 의해 활발히 연구된 모형 중 하나이다 [3-8]. 여기서 문화란 사회적 영향 속에서 개개인의 기호나 규범, 행동 양식들의 공통된 집합을 말하며 서로간의 상호작용으로 인해 공변할 수 있다. 이런 문화의 형성과 파급은 몇 가지 중요한 특징을 지닌다. 사회 구성원들은 자신과 문화적 특성을 더 많이 공유하는 사람과 상호작용하려는 경향이 있다. 또한 개개인들 간의 상호작용은 동일한 문화적 특성을 공유하게 함으로써, 동일한 문화적 특성을 갖는 사람의 수를 증가시킨다. Axelrod 모형에서는 문화의 다양성을 나타내는  $q$  값

에 따라서 문화계가 다른 특성을 보이게 된다. 즉 임계값  $q_c$ 가 존재하여  $q < q_c$ 일 때는 문화계의 구성 원소들의 대부분이 단일문화에 속하는 질서상태 (order phase)가 되고,  $q > q_c$ 일 때는 구성 원소들이 서로 다른 문화를 갖게되는 무질서상태 (disorder phase)가 된다.

본 연구에선 자유 축척 그물망 (scale-free network) 위에서 Axelrod 모형의 비평형 질서-무질서 상전이 (nonequilibrium order-disorder phase transition) 현상에 대하여 중점적으로 연구하였다. 자유 축척 그물망이란 다리수 분포 (degree distribution)가  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 와 같이 멱법칙을 만족하는 그물망을 말한다 [11,12]. 여기서 지수  $\gamma$ 는 다리수 지수 (degree exponent)라고 한다. 실제 actor network나 email network 등에서 볼 수 있는 바와 같이 많은 사회 그물망 (social network)들의 구조가 이와 같은 자유 축척 그물망 형태임이 알려졌다. [9,10]. 다리수 분포가 포아송 (Poisson) 분포인 무작위 그물망 (random network)에서는 노드들이 주로 가지는 평균적인 다리수가 존재하지만, 자유 축척 그물망에선 몇몇 노드들이 다른 노드들보다 훨씬 많은 다리수를 가지게 된다. 자유 축척 그물망에서 다른 노드들보다 훨씬 많은 다리수를 가지는 노드들을 허브라고 말한다. 자유 축척 그물망은 이런 허브의 역할로 인해 정규격자나 무작위 그물망과는 다른 특성을 보인다 [13-15]. 또한 같은 자유 축척 그물망 구조라도 다리수 지수 ( $\gamma$ )에 따라 물리학적 거동

\*E-mail: syook@khu.ac.kr

이 완전 틀려지는 경우도 있다. 예를 들면  $2 < \gamma \leq 3$ 인 무한 크기의 자유 축척 그물망위에서 전염병이 퍼지는 경우 약간의 전염율만 있더라도 전체 그물망으로 쉽게 전염병이 퍼지는 특성이 있다. 반면  $\gamma > 3$ 인 무한 크기의 자유 축척 그물망위에서는 전염율의 임계값이 존재하여 그 이하에선 전체 그물망으로 퍼지지 않는다. [16]

이전의 Axelrod 모형에 대한 연구들은 주로 1차원 또는 2차원 정규격자 위에서 다루어왔다 [5,6,8]. 하지만 사회 그물망에 속하는 문화계의 구조는 정규격자와 같은 균질한 (homogeneous) 구조라기 보다는 비균질성 (heterogeneity)을 가지는 복잡한 그물망 구조에 보다 가깝다고 할 수 있다. 따라서 보다 실질적인 문화 형성 특성을 이해하기 위해서 다양한 복잡한 그물망 위에서 Axelrod 모형의 특성을 이해할 필요가 있다. 그런데 지금까지는 다리수 지수 ( $\gamma$ )가 3인 Barabasi-Albert network (BA network) [11]위에서만 연구가 있었고 [7] 그물망의 구조가 불균질 (heterogeneous)해지는  $\gamma < 3$ 인 그물망이나 그밖에  $\gamma > 3$ 인 그물망에 대한 조직적인 연구는 없었다. 이런 취지에서 우리는 자유 축척 그물망에서  $\gamma$ 의 값을 여러가지로 조절하면서 Axelrod 모형의 질서-무질서 상전이 현상의 특성에 대하여 연구하려고 한다.

## II. Axelrod 모형

우리는 기존의 Axelrod 모형 [3,4]을  $N$ 개의 노드로 구성된 자유 축척 그물망위에서 연구하였다. 우선 우리는 자유 축척 그물망을 구성할 때, 다리선 지수 ( $\gamma$ )를 쉽게 조절할 수 있는 모형으로서 제안된 정적 모형 (static model)을 이용하였다 [17]. 정적모형은 그물망의 각 노드  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )를  $i^{-\alpha}$ 의 확률로 연결 시킨 모형이다. 이렇게 구성된 그물망은 다리수 분포 (degree distribution)가  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 를 만족하며 다리수 지수 ( $\gamma$ )는  $\gamma = (1 - \alpha)/\alpha$ 의 관계를 가진다.

이제 자유 축척 그물망위에서 Axelrod 모형 [7]을 정확히 정의해 보자. 그물망의 각 노드들은 문화계의 구성원들을 나타낸다. 각각의 노드  $i$ 의 문화적 특성은  $F$ 개의 다른 문화적 요소의 집합 ( $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{iF}$ )로 정의된다. 초기에 노드  $i$ 의 각각의  $\sigma_{if}$  ( $f = 1, 2, \dots, F$ )는 1에서  $q$ 까지의 자연수 중 하나를 동일한 확률로 무작위로 선택하여 정한다. 여기서  $q$ 는 어떤 문화적 특성에 대한 개개인의 행동, 태도등의 종류를 나타내며 문화계의 문화적 다양성과 연관된다. 그 후 다음의 과정을 반복한다.

(1) 그물망에서 임의의 노드  $i$ 와 연결된 노드들 중 하나인  $j$ 를 무작위로 선택하여 이루어진 bond ( $i, j$ )를 선택한다.

(2) 다음으로 두 노드  $i$ 와  $j$ 가 공유하는 특성의 수  $m(i, j) = \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_{if}, \sigma_{jf}}$ 를 계산한다.

(3) 만약  $0 < m(i, j) < F$ 이면 bond ( $i, j$ )는 활동적 상태에 있다 정의하고 bond의 두 노드  $i$ 와  $j$ 에 확률  $m_{ij}/F$ 을 할당한다.

(4) 확률  $m_{ij}/F$ 로 다음과 같은 과정을 시행한다. 노드  $i$ 와  $j$  사이의 다른 문화적 특성, 즉,  $\sigma_{if} \neq \sigma_{jf}$ 인 특성 중 하나를 무작위로 선택하고, 그 선택한 특성을  $\sigma_{if} = \sigma_{jf}$ 와 같이 동일하게 만든다.

(5) 만약 bond ( $i, j$ )에서 문화적 특성이 모두 같거나 ( $m(i, j) = 0$ ) 다르다면 ( $m(i, j) = F$ ) 아무일도 일어나지 않는다.

이러한 규칙은 앞서 언급했던 구성원들이 자신의 문화적 특성과 비슷한 구성원과 더 잘 상호작용하려는 경향뿐만 아니라 상호작용으로 인해 서로 간에 공유하는 문화적 특성이 늘어난다는 사실을 잘 반영한다. Dynamics가 진행됨에 따라 Axelrod 모형은 활동적 상태의 bond가 존재하지 않는 흡수상태 (absorbing state), 즉 모든 bond에 대하여  $m = 0$  or  $F$ 인 상태에 들어가게 된다. Axelrod 모형은 문화적 다양성  $q$ 에 따라서 크게 두가지의 흡수 상태가 존재한다. 초기 상태에서  $q$ 값이 작다면 구성 요소들은 서로 쉽게 상호작용하고 결국 전체 문화계의 문화적 특성이 거의 동일해지는 단일문화상태에 들어가게 될 것이다. 반면에  $q$  값이 증가함에 따라 거의 모든 노드의 문화적 특성 ( $\sigma_{if}$ )이 서로 달라져서 노드끼리 상호작용하기 어려워지고, 그 결과 거의 모든 노드들의 문화적 특성이 다른 또 하나의 흡수상태가 생성될 수 있다. 이처럼 계가 어떤 흡수상태에 들어가느냐는  $q$ 에 따른 문화적 다양성과 계를 질서화 시키려는 (문화적 특성을 같게 만드려는) 국소적 상호작용 중 어느 것이 우세하느냐에 달려있다.

## III. 결 과

$q$ 가 변함에 따라 나타날 수 있는 두 가지 서로 다른 상태를 더 잘 이해하기 위하여 질서 매개 변수 (order parameter)  $\langle s_{max} \rangle/N$ 를 도입했다. 동일한 문화적 특성을 가지면서 서로 연결된 노드들의 집합, 즉 동일 구역 (homogeneous domain)의 크기를  $s$ 라 정의하면  $\langle s_{max} \rangle$ 는 가장 큰 동일 구역의 크기의 평균을 의미한다. 이 때 경계 값  $q_c$ 가 존재하여  $q < q_c$ 면 계는 단일문화상태로 질서화 ( $\langle s_{max} \rangle/N \sim 1$ )되고  $q > q_c$ 면 다수문화상태로 무질서화 ( $\langle s_{max} \rangle/N \sim 0$ )되는 질서-무질서 상전이 현상이 확인되었다 [5-7]. 그러나 자유 축척 그물망 위에서의 Axelrod

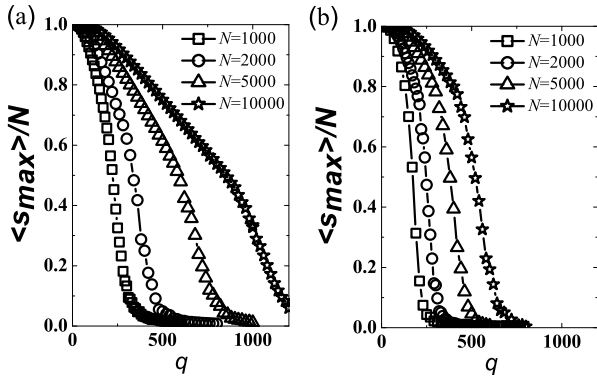


Fig. 1. Plot of  $\langle s_{max} \rangle / N$  against  $q$  when  $F = 10$  for (a)  $\gamma = 2.3$  and (b)  $\gamma = 2.7$ .

모형의 상전이 특성의 연결선 지수 ( $\gamma$ )에 의존성에 대한 연구는 알려져 있지 않다.

우선 유한 자유 축척 그물망을 정적 모형 [17]을 이용하여 만들어 평균 다리선 수  $\langle k \rangle = 4$ 로 고정시켜 모든 노드가 한 클러스터에 모이게 하였다. 본 논문에서는 주어진  $\gamma$ 에 대하여  $F = 10$ 으로 고정시켜 놓고  $q$ 를 조절하며  $\langle s_{max} \rangle / N$ 가 어떻게 변화하는지 조사하였다. 주어진  $\gamma$ 와 크기가  $N$ 인 그물망을 10개를 만든 다음, 각 그물망 위에서 10번의 시뮬레이션하여 얻은 총 100 번의  $s_{max}$ 를 평균하여  $\langle s_{max} \rangle$ 들을 계산했다.

먼저  $\gamma < 3$ 인  $\gamma = 2.3$ 과  $\gamma = 2.7$ 의 자유 축척 그물망 위에서  $\langle s_{max} \rangle / N$ 의  $q$ 에 대한 의존도를 Fig. 1(a)와 (b)에 나타내었다. 유한 크기의 그물망에서 유한한 임계점  $q_c$ 을 경계로  $\langle s_{max} \rangle / N \sim 1$ 인 질서 상태에서  $\langle s_{max} \rangle / N \sim 0$ 인 무질서 상태로 상전이가 일어나는 것을 확인할 수 있었다. 또한 그물망 크기가 커질수록 상전이 점이 점점 커진다는 것을 알 수 있다. 이를 정량적으로 확인해 보기 위해  $N$ 에 대한 상전이점  $q_c(N)$ 을  $\langle s_{max} \rangle / N = 0.5$ 인 관계식을 통해 정의하여  $q_c(N)$ 과  $N$ 의 관계를 구했다. Fig. 2(a)와 (c)에 그런 방법으로 얻은  $q_c(N)$ 과  $N$ 의 관계를 나타내었다. 그 결과  $q_c(N)$ 과  $N$ 은  $q_c(N) \sim N^\beta$ 와 같은 멱법칙을 잘 만족함을 알 수 있었다. 그리고 식  $q_c(N) \sim N^\beta$ 을 이용하여 구한  $\beta$ 는 각각  $\beta = 0.58 \pm 0.01$  ( $\gamma = 2.3$ ),  $\beta = 0.47 \pm 0.01$  ( $\gamma = 2.7$ )이다. (Fig. 2(a)와 (c)에서 직선 참조.)

특히 식  $q_c(N) \sim N^\beta$ 을 이용하여 얻은  $\beta$ 값을 이용하여  $\langle s_{max} \rangle / N$ 를 rescale 한 관계식  $\langle s_{max} \rangle / N(q, N) = g(qN^{-\beta})$ 을 얻을 수 있는데 Fig. 1(a)와 (b)의 데이터들이  $N$ 에 관계없이 rescale 한 관계식으로 잘 collapse된다는 사실을 Fig. 2(b)와 (d)에서 잘 알 수가 있다. 또

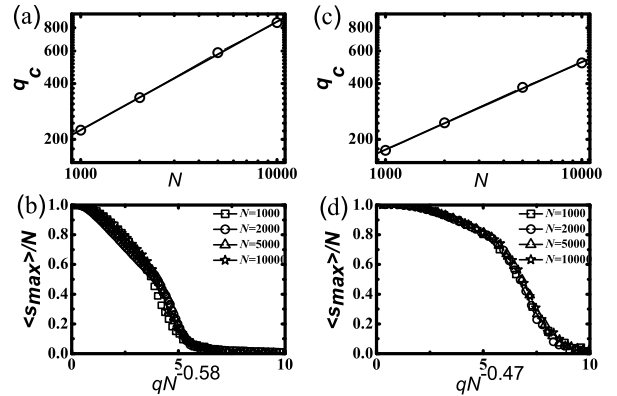


Fig. 2. (a) Plot of  $q_c$  against  $N$  for  $\gamma = 2.3$ . The solid line represents the relation  $q_c(N) = CN^{0.58}$ , where  $C$  is a constant. (b) Scaling plot of order parameter in Fig.1(a) using a scaling function  $\langle s_{max} \rangle / N(q, N) = g(qN^{-0.58})$  when  $\gamma = 2.3$ . (c) Plot of  $q_c$  vs.  $N$  for  $\gamma = 2.7$ . The solid line stands for the relation  $q_c(N) = CN^{0.47}$ . (d) Scaling plot of order parameter for  $\gamma = 2.7$  using a scaling function  $\langle s_{max} \rangle / N(q, N) = g(qN^{-0.47})$ .

$\gamma = 3$ 인 자유 축척 그물망위에서도  $\beta = 0.39 \pm 0.01$ 인 값을 이용하면  $\langle s_{max} \rangle / N(q, N) = g(qN^{-\beta})$ 인 유한 축척 함수를 Axelrod 모형이 잘 만족시키는 것이 알려져 있다. [7] 따라서  $\gamma = 2.3, 2.7, 3.0$ 에서의 결과들을 종합해 보면  $\gamma \leq 3$ 인 자유축척 그물망에서는 그물망 크기에 따른 임계값은  $q_c(N) \sim N^\beta$  ( $\beta > 0$ )의 관계를 만족함을 알 수 있으며  $\beta$  값은  $\gamma$ 가 증가할수록 감소함을 알 수 있다.

따라서  $\gamma \leq 3$ 인 그물망 위에서의 얻은 Axelrod 모형의 유한 축척 특성으로 생각해 보면  $N \rightarrow \infty$ 인 열역학적 극한에서는 상전이 현상이 사라지고 계는 항상 질서 상태에 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는  $\gamma \leq 3$ 인 그물망의 비균질한 구조적 특성에 기인할 것이라 사료된다.  $2 < \gamma < 3$ 인 자유 축척 그물망에서는 평균 다리수보다 훨씬 더 큰 다리수를 가지는 허브 노드의 존재가 두드러지게 나타난다. 이러한 허브는 계에서 문화의 과급에 중대한 역할을 하게 된다. 각 노드들은 허브를 통해 많은 수의 다른 노드들과 상호작용 하므로 결국 문화계는 쉽게 질서상태에 들어가게 됨을 이 결과로부터 알 수 있다.

하지만 자유 축척 그물망에서  $\gamma$ 가 점점 증가할수록 이런 허브의 역할은 점차 줄어들게 된다. 따라서 우리는  $\gamma > 3$ 인 자유 축척 그물망위에서 Axelrod 모형의 특징을 알아보고 다른 복잡계 그물망과 비교해보기 위하여  $\gamma = 5.0$ 인 자유 축척 그물망과 Erdős-Rényi (ER) 무작위 그물망 [18]에서 시뮬레이션해 보았다. 우리는 앞선

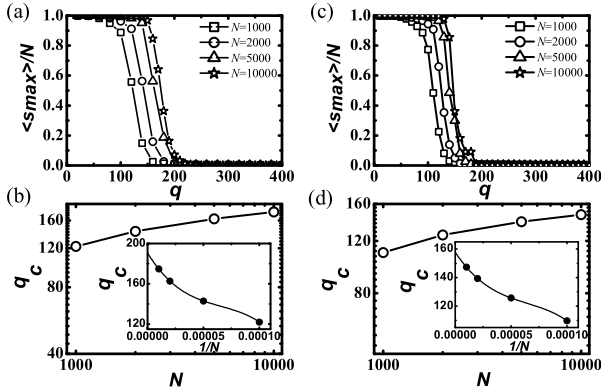


Fig. 3. Plots of (a)  $\langle s_{max} \rangle / N$  against  $q$  and (b)  $q_c(N)$  on scale-free networks with  $\gamma = 5.0$ . Plots of (c)  $\langle s_{max} \rangle / N$  vs.  $q$  and (d)  $q_c(N)$  on ER random networks. The insets in (c) and (d) show the relation between  $q_c$  and  $1/N$ . The solid lines in the insets represent the expectation by extrapolation.

$\gamma < 3$ 인 자유 축척 그물망에서와 동일하게  $\langle k \rangle = 4$ 가 되게끔 두 노드를 연결할 확률을 조정하였다. Fig. 3(a)와 (c)는 각각  $\gamma = 5.0$ 와 ER 무작위 그물망에서 서로 다른 그물망 크기  $N$ 에 대한 질서-무질서 상전이의 그래프이다.  $N$ 이 증가함에 따라 그래프의 기울기는 점점 가파라지며 상전이 현상이 뚜렷해짐을 볼 수 있다. Fig. 3(b)와 (d)는  $N$ 에 대한  $q_c(N)$ 을 그린 것으로  $N$ 이 커질수록  $q_c(N)$ 의 증가량이 감소함을 볼 수 있다. Fig. 3(b)와 (d)의 내부 그림은  $q_c(N)$ 과  $1/N$ 의 관계를 보여준다. 이 데이터들로부터  $N \rightarrow \infty$  (또는  $1/N \rightarrow 0$ )인 극한에서, 외삽법을 이용하여 추정된  $q_c(N \rightarrow \infty)$ 는  $\gamma = 5.0$ 일때  $q_c(N \rightarrow \infty) \approx 191$ 이며 ER 무작위 그물망에서는  $q_c(N \rightarrow \infty) \approx 158$ 이다. 따라서  $\gamma > 3$ 인 경우  $N \rightarrow \infty$ 인 극한에서  $q_c(N)$ 은 어떤 유한한 값에 가까워짐을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 전에 연구되어진 1차원과 2차원 정규격자에서의 거동과 동일하다. [5,6]

#### IV. 결 론

우리는 문화의 형성과 파급에 관한 대표적인 모형인 Axelrod 모형이 자유 축척 그물망 구조에 어떻게 영향을 받는지에 대하여 연구했다. Axelrod 모형은 문화적 다양성 ( $q$ )에 따라서  $q < q_c$ 면 문화계는 단일문화상태로 질서화 ( $\langle s_{max} \rangle / N \sim 1$ )되고  $q > q_c$ 면 다수문화상태로 무질서화 ( $\langle s_{max} \rangle \ll N$ )되는 질서-무질서 상전이 현상을 보인다. 자유 축척 그물망 구조의 대표적 특징은 다

리수 분포가  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 와 같이 멱법칙을 따르며 연결선 지수 ( $\gamma$ )에 따라서 구조적 특성이 바뀐다는 점이다. 우리는 그물망의 구조적 특성에 따라 질서-무질서 상전이 현상이 어떻게 바뀌는지 알아보기 위하여 연결선 지수 ( $\gamma$ )를 여러가지로 조절해가며 연구하였다. Numerical simulation으로부터  $\gamma = 3$ 인 값을 경계로 상전이 현상의 두가지 상반된 거동을 확인하였다.  $\gamma \leq 3$ 에서는 그물망의 크기  $N$ 과  $q_c(N)$ 이  $q_c(N) \sim N^\beta$ 의 관계를 가짐을 유한 크기 축척 이론으로 알아내었다.  $N \rightarrow \infty$ 에서 상전이는 사라지고 계는 항상 질서상태가 된다. 반면  $\gamma > 3$ 에서는  $N \rightarrow \infty$ 일 때  $q_c$ 는 유한한 값으로 수렴하게 되며 이는 무작위 그물망과 기존의 1차원, 2차원 정규격자에서의 결과와 동일하다. 이러한 상전이 현상의 차이는 연결선 지수 ( $\gamma$ )에 따라 나타나는 허브의 역할의 차이에서 발생한다. 즉  $\gamma \leq 3$ 인 자유 축척 그물망에서는 거대한 크기의 허브가 나타나고 문화의 형성과 파급이 더 잘 일어나게 하는 역할을 한다.

#### 감사의 글

이 논문은 재단법인 한국이론-물리 및 화학연구회의 지원 및 2008년도 정부재원 (교육인적자원부 학술연구 조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2008-321-B00031).

#### 참 고 문 헌

- [1] R. N. Mantegna and E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999).
- [2] X. Guardiola, A. Diaz-Guilera, C. J. Pérez, A. Arenas and M. Llas, Phys. Rev. E **66**, 026121 (2002).
- [3] R. Axelrod, *The Complexity of Cooperation* (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [4] R. Axelrod, J. Conflict Res. **41**, 207 (1997).
- [5] C. Castellano, M. Marsili and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. **85**, 3536 (2000).
- [6] D. Vilone, A. Vespignani and C. Castellano, Eur. Phys. J. B **30**, 399 (2002).
- [7] K. Klemm, V. M. Eguiluz, R. Toral and M. San Miguel, Phys. Rev. E **67**, 026120 (2003).
- [8] K. Klemm, V. M. Eguiluz, R. Toral and M. San Miguel, Phys. Rev. E **67**, 045101 (2003).

- [9] M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos, *Comput. Commun. Rev.* **29**, 251 (1999).
- [10] R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barabaši, *Nature* **401**, 130 (1999).
- [11] A.-L. Barabaši and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [12] R. Albert and A.-L. Barabaši, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [13] R. Cohen, D. ben-Avraham and S. Havlin, *Phys. Rev. E* **66**, 036113 (2002).
- [14] S. Lee, S. -H. Yook and Y. Kim, *Phys. Rev. E* **74**, 046118 (2006).
- [15] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev and J. F. F. Mendes, *Phys. Rev. E* **66**, 016104 (2002).
- [16] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200 (2000).
- [17] K.-I Goh, B. Kahng and D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 278701 (2001).
- [18] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. Debrecen.* **6**, 290 (1959).

## Axelrod Model on Scale-free Networks

Min-Su CHO, Hong-Joo KIM, Soon-Hyung YOON\* and Yup KIM

*Department of Physics, Kyung Hee University, Seoul 130-701*

(Received 9 December 2008)

We study the Axelrod model, which describes the formation and spreading of cultural consensus on scale-free networks. A scale-free network is a network whose degree distribution satisfies a power law,  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ . In the Axelrod model, the variable  $q$ , which represents the cultural diversity, has a threshold  $q_c$ . For  $q < q_c$ , the system or the society is in an ordered state in which all agents have the same culture. On the other hand, when  $q > q_c$ , all agents have different culture, and the systems is in a disordered state. In this paper, we study the effect of the underlying topology on the properties of the order-disorder phase transition. Using a finite-sized scaling analysis, we find that  $q_c$  satisfies the power-law  $q_c(N) \sim N^\beta$  ( $\beta > 0$ ) when  $\gamma \leq 3$ . Here  $N$  is the size of the network. This result indicates that the system is always in an ordered state for any  $q$  in the limit  $N \rightarrow \infty$ . However, when  $\gamma > 3$ , the system undergoes a phase transition at finite  $q_c$  as  $N \rightarrow \infty$ .

PACS numbers: 87.23.Ge, 05.70.Fh, 05.90.+m, 89.90.+n

Keywords: Complex systems, Opinion dynamics, Sciophysics, Phase transitions

\*E-mail: syook@khu.ac.kr